＊研究简讯＊

关于 Siegel-Tatuzawa 定理*

陆洪文[1**]　纪春岗[1,2]

1. 同济大学数学研究所，上海 200092；2. 南京师范大学数学系，南京 210097

摘要　设正数 ε 小于 $1/(6\log 10)$，χ 为模 k 的实原特征且 k 大于 $e^{1/\varepsilon}$. 则除去至多一个可能的特征外，均有

$$L(1,\chi) > \min\left\{\frac{1}{7.703\log k}, \frac{18.236\varepsilon}{k^{\varepsilon}}\right\}.$$

关键词　关键词　L-函数　零点　二次数域

设 χ 为模 k 的实原特征. 众所周知，如果 $L(s,\chi)$ 在区间 $(1-c_1/\log k,1)$ 上没有实零点，则 $L(1,\chi)>c_2/\log k$，其中 c_1 和 c_2 为两个正数且 c_2 只依赖于 c_1(见引理 3). 当 $L(s,\chi)$ 在 1 附近有实零点时，惟一的非平凡下界是 Siegel[1] 首先给出的. 他证明了对任意的 $\varepsilon>0$，均存在正常数 $c(\varepsilon)$，使得

$$L(1,\chi) > \frac{c(\varepsilon)}{k^{\varepsilon}},$$

这里的正常数 $c(\varepsilon)$ 是非实效的. Tatuzawa[2] 证明了：如果 $0<\varepsilon<1/11.2$ 而且 $k>e^{1/\varepsilon}$，则除去至多一个可能的例外情况外，均有

$$L(1,\chi) > \frac{0.655\varepsilon}{k^{\varepsilon}}.$$

Hoffstein[3] 证明了：如果 $0<\varepsilon<1/(6\log 10)$ 而且 $k>e^{1/\varepsilon}$，则除去至多一个可能的例外情况外，均有

$$L(1,\chi) > \min\left\{\frac{1}{7.735\log k}, \frac{\varepsilon}{0.349k^{\varepsilon}}\right\}.$$

有关 Siegel-Tatuzawa 定理还可参见文献[4～9].

本文对 Hoffstein[3] 的方法加以改造，得到了要强于 Hoffstein 等人的结果，即

定理　设正数 ε 满足 $0<\varepsilon<1/(6\log 10)$，正整数 $k>e^{1/\varepsilon}$. 那么，除去至多一个可能的例外情况外，对每一个模 k 的实原特征 χ，均有

$$L(1,\chi) > \min\left\{\frac{1}{7.703\log k}, \frac{18.236\varepsilon}{k^{\varepsilon}}\right\}.$$

为了证明这个定理，我们需要若干引理.

2001-02-21 收稿，2001-04-18 收修改稿

＊国家自然科学资金资助项目(批准号：19531020)

＊＊ E-mail: ljghw@online.sh.cn

引理 1 对 Riemann ζ 函数有

$$(1-2^{1-\sigma})\zeta(\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\sigma}},\quad \sigma>1.$$

特别 $\zeta\left(\frac{5}{2}\right)<1.3421$.

引理 2 对 $b>0$ 及正整数 m 有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{y^s}{s(s+1)\cdots(s+m)}ds=\begin{cases}\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{y}\right)^m, & y\geqslant 1;\\ 0, & 0<y<1.\end{cases}$$

证明 见文献[10].

利用引理 1 和引理 2, 以及 χ 所对应的二次数域的函数方程, 我们有下面的主要引理.

引理 3 设 χ 为模 k 的实原特征, $k\geqslant 10^6$. 如果在区间 $(\beta,1)$ 上 $L(s,\chi)\neq 0$, 其中 $1-\beta<(11.657\log k)^{-1}$, 则有

$$L(1,\chi)>1.5135(1-\beta);$$

如果对 $3/4\leqslant s<1$, 有 $L(s,\chi)\neq 0$, 则

$$L(1,\chi)>(1.536\log k)^{-1}.$$

引理 4 设 $F=\mathbb{Q}(\sqrt{d},\sqrt{d_1})$ 为双二次数域, 其中 d, d_1 分别为 F 的二次子域 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$ 的判别式, 则 F 恰还有一个二次子域 $(\sqrt{d_2})$, 其中 d_2(整除 dd_1)是判别式. 如果这 3 个二次子域所对应的 Kronecker 符号(实原特征)分别为 χ, χ_1, χ_2, 则 F 的 Dedekind ζ 函数为

$$\zeta_F(s)=\zeta(s)L(s,\chi)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2),\quad s\in\ .$$

$\zeta_F(s)$ 所满足的函数方程为

$$\zeta_F(1-s)=\left(\frac{|d_F|}{4^{r_2}\pi^4}\right)^{s-\frac{1}{2}}\left(\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma((1-s)/2)}\right)^{r_1}\left(\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}\right)^{r_2}\zeta_F(s),$$

其中 $|d_F|=|dd_1d_2|$ 为 F 的判别式的绝对值, 而且 $r_1=4$, $r_2=0$, 如果 $\chi(-1)=\chi_1(-1)=1$; 其他情况, $r_1=0$, $r_2=2$. 再令

$$\zeta_F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\ \mathrm{Re}(s)>1.$$

则有

$$a_n\geqslant 0,\quad a_{n^2}\geqslant 1\ (n=1,2\cdots).$$

引理 5 记号同引理 4, F 为双二次数域, 则 $\zeta_F(s)$ 至多有一个实零点 β 满足

$$\beta>1-\frac{2(\sqrt{2}-1)^2}{\log|d_F|}. \tag{24}$$

引理 6[2] 设 χ 是模 k 的实原特征, $M(\chi)=\max_n\left|\sum_{m=1}^{n}\chi(m)\right|$. 则

$$M(\chi)\leqslant\frac{1}{2\pi}\sqrt{k}\left(\log k+2\log\log k+2\log 2+6+\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right).$$

利用双二次数域的函数方程以及它的一些算术性质, 再加上前面的几个引理, 我们就可

以完成定理的证明.

参　考　文　献

1 Siegel C L. Über die classenzahl quadratischer zahlkörper. Acta Arith, 1935, 1: 83
2 Tatuzawa T. On Siegel's theorem. Japanese Journal of Math, 1951, 21: 163
3 Hoffstein J. On the Siegel-Tatuzawa theorem. Acta Arith, 1980, 38: 167
4 Estermann T. On Dirichlet's *L* functions. J London Math Soc, 1948, 23: 275
5 Chowla S. A new proof of a theorem of Siegel. Annals of Math, 1950, 51(1): 120
6 Goldfeld D M. A simple proof of Siegel's theorem. Proc Nat Acad Sci, 1974, 71: 1055
7 Stark H M. Some effective cases of the Brauer-Siegel theorem. Invent Math, 1974, 23: 135
8 Goldfeld D M, et al. On Siegel's zero. Ann Scuola Normale Sup, 1975, 4(Series IV, 2): 571
9 Davenport H. Multiplicative Number Theory. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1980
10 Rademacher H. Topics in Analytic Number Theory. New York: Springer-Verlag, 1973. 97